

克里金参数估值法及其在参数估计分析中的应用

孙强^{1,2}, 薛雷¹, 王媛媛¹

(1.中国科学院地质与地球物理研究所 工程地质力学重点实验室, 北京 100029; 2.中国矿业大学 资源与地球科学学院, 徐州 211008)

摘要: 为考虑岩土介质参数的空间分布的结构性和随机性等不确定因素, 引入了克里金参数估值法。采用变异函数描述参数在空间结构上的变化, 建立其空间变异规律的数学模型, 从而实现对岩土参数的估值。通过实例分析揭示了克里金估值法具有反映“过滤效应”和“集团效应”的优点, 对不同位置的数据赋予不同的权重系数, 能够有效地反映参数空间变异结构, 有利于对参数的合理化分析。

关键词: 岩土力学参数; 克里金法; 权重系数; 空间不均匀; 变异函数

中图分类号: TU 45

文献标识码: A

Kriging method for parameter estimation and its application to geo-engineering

SUN Qiang^{1,2}, XUE Lei¹, WANG Yuan-yuan¹

(1. Key Laboratory of Engineering Geomechanics, Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China;

2. School of Resources and Earth Science, China University of Mining & Technology, Xuzhou 211008, China)

Abstract: Geo-mechanical parameters have structural and stochastic properties on spatial variability, which causes the uncertainty of geo-mechanical parameters. The Kriging method and variant function are used for analyzing the spatial variability of geo-mechanical parameters of rock and soil. Theoretical model of variant function is employed as the mathematical model for depicting the spatial variability law of geo-mechanical parameters. Demonstrated by example, the Kriging method for parameter estimation is revealed the filtration effect and agglomeration effect. The different weight coefficients can effectively provide the variability estimation of geo-mechanical parameters.

Key words: mechanical parameters of rock and soil; Kriging; weight coefficient; spatial heterogeneity; variant function

1 引言

岩土体内具有空间变异性的岩土力学参数是一种空间变量, 其空间变异规律在本质上可看成是与岩土介质的空间位置坐标有关的一个空间实函数, 但岩土体本身结构构造十分复杂, 无法根据取样信息值导出函数的显式表达式。岩土体在形成及后期改造过程中同时受到宏观规律的控制和偶然因素的影响, 导致岩土体力学参数的空间变异性具有局部的随机性及整体的结构性二重性, 传统的分析计算方法中, 比如方差分析等都不考虑, 这就使得计算过程中的参数存在很大程度上的人为改造, 造成计算结果的失真, 评价结果的可靠性值得怀疑。因此, 在进行参数估值时要分析其在空间上的相互连续性。

目前岩土力学参数空间变异性研究已经取得了一定成果^[1-6], 同时其他相关的领域也有很多的科研成果^[7-10], 但总体上对空间变异函数的构造和应用分析还有待于进一步研究。本文基于克里金参数估值法, 通过构造变异函数, 对观测数据进行空间结构性分析。

2 克里金法与变异函数

克里金的估计公式为

$$Z^*(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) \quad (1)$$

式中: $Z^*(x_0)$ 为在 x_0 位置的估计值; $Z(x_i)$ 为在 x_i 位置的测量值。其估计值误差的方差为

$$S = 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i - x_0) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j) \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (3)$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N_h} \sum_{i=1}^{N_h} [Z(x_i + h) - Z(x_i)]^2 \quad (4)$$

式中: $\gamma(h)$ 是变异函数, h 为分离距离; N_h 为在 $(x_i + h, x_i)$ 之间用来计算样本变异函数值的样本的对数。在求估计方差的极小值时需引入一个拉格朗日乘数 μ :

$$S = 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i - x_0) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j) - 2\mu \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right) \quad (5)$$

为使估计方差最小, 有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda_1} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \lambda_2} &= 0 \\ \dots \\ \frac{\partial S}{\partial \lambda_n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

根据

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i - x_j) + \mu &= \gamma(x_j - x_0) \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

即:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nn} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{01} \\ \vdots \\ \gamma_{0n} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

得到所有的权重 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 和拉格朗日乘数 μ , 其中, $\gamma_{ij} = \gamma(x_i - x_j)$, 即距离为 x_i 和 x_j 之间的变异函数值。

运用计算所得的权重和拉格朗日乘数, 可由式

(1) 求得估计值 Z^* 和估计方差:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_0 - x_i) + \mu \quad (9)$$

2 举例分析

如图 1 所示, 在某次物理力学参数分析试验中, 在空间的 9 个位置上进行试验测试 (编号如图所示), 获得了相关的稳定性参数 $K(\varphi, c)$, 并将其与位置坐标列于表 1。图 1 中实心圆圈为已知试验点位置, 位置待估值点用空心圆圈标出。

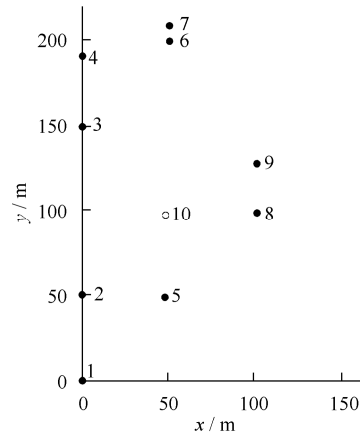


图 1 试验点的空间位置

Fig.1 Spatial positions of experiment zone

表 1 试验点位置与试验值

Table 1 Spatial positions and values of experiment zone

编号	X/m	Y/m	试验值 K
1	0	0	6.4
2	0	50	7.6
3	0	150	6.8
4	0	190	5.9
5	50	50	12.2
6	50	200	5.9
7	50	210	7.6
8	100	100	9.9
9	100	130	6.8
10	50	100	待估点

由式 (4) 计算样本的变异函数值如图 2 所示。

对点 10 (50, 100) 进行插值。用图 2 所示的模型, 可以计算公式 (8) 中的变异函数, 其结果如式 (10) 所示

$$\begin{bmatrix} 0.83 & 5.28 & 5.19 & 1.79 & 6.25 & -0.13 & -1.43 & 5.67 & 4.22 & 1 \\ 0.83 & 6.73 & 5.74 & 5.28 & 4.66 & 3.93 & 6.64 & 6.24 & 1 \\ 0.83 & 4.63 & 6.64 & 6.25 & 6.47 & 6.64 & 6.73 & 1 \\ 0.83 & 5.27 & 5.34 & 5.50 & 5.99 & 6.55 & 1 \\ 0.83 & 5.19 & 4.52 & 6.25 & 6.72 & 1 \\ 0.83 & 1.96 & 6.64 & 6.63 & 1 \\ 0.83 & 6.46 & 6.72 & 1 \\ 0.83 & 3.86 & 1 \\ 0.83 & 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.047 \\ 0.123 \\ 0.219 \\ -0.072 \\ 0.329 \\ 0.091 \\ -0.073 \\ 0.267 \\ 0.163 \\ 0.669 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.64 \\ 6.25 \\ 6.25 \\ 6.73 \\ 5.28 \\ 6.73 \\ 6.67 \\ 5.28 \\ 5.73 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

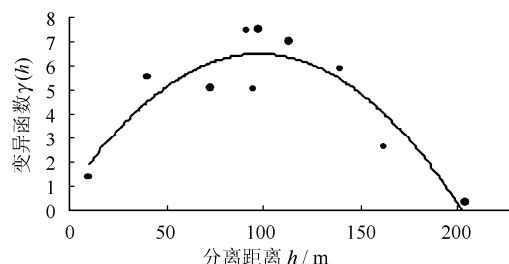


图2 变异函数模型

Fig.2 Model of variant function

3 分析讨论

根据式(10)的结果可知, 权重依赖于测量值和估值点之间距离, 同时也依赖于测量点之间的分布情况。所有权重之和为 1, 最大权重在点 5(0.33), 这是由于 5 与估值点的距离最近; 中等权重在位置 2(0.123)、3(0.219)、8(0.163)、9(0.18), 尽管点 2、3 比点 8、9 距离估值点要远一些, 但权重却差不多, 甚至更大一些, 这是因为点 8 和 9 相互接近, 它们的信息有重复; 点 1、4、6、7 的权重很小, 甚至为负值, 其原因是 (1) 这些点与其他点相比距离估值点更远, 它们与估值点的空间关系比较小;

(2) 这些点与估值点的联系被另一个与估值点更近的相邻点阻断了, 阻断点包含了更多的信息, 被过滤点的权重就变小了。通过下式可得估计值为 9.45, 被估点的估计方差为 6.22。

$$K_{10} = \sum_{i=1}^9 \lambda_i K_f = 9.45 \quad (11)$$

这一估值高于这 9 个相邻的平均值 (7.68), 作简单平均计算时, 每个试验测量值都分配给相等的权重 (1/9)。

通过对上述方法的推广应用到未进行试验测试的位置, 则可用来评估参数状况的空间分布规律, 同时分析可知, 克里金法主要的优点: ①如果用来进行估计值的测量点之间以及测量点与估值点之间的距离都大于变异函数的变差距离, 则克里金法估值公式就变成了 n 个测量值的算术平均; ②权重的计算是根据变量的空间变异结构所得, 用来估值的测量点之间的位置关系, 测量点与估值点之间的位置关系对估值的精度都是很重要的; ③在估值过程中, 稍远的样本点几乎不占有任何权重; ④聚集成团的样本值分配到集合权重与它们中心位置的一个样本点分配到的权重几乎相等; ⑤通过考虑样本间的距离和样本团聚考虑了变量固有的空间连续性和空间分布。

4 结 论

岩土介质在空间上具有很大的变异性, 为考虑岩土参数空间上的随机性和变异性, 合理地利用

空间分布的试验数据, 实现岩土参数的空间变异性估值, 本文引入了克里金参数估值法, 并通过实例进行分析, 得到了以下认识:

(1) 采样克里金参数估计法能反映岩土参数的空间变异性, 对岩土参数空间变异性做出更符合实际的分析与评价, 在实例分析中可知, 该法计算出的稳定性比算术平均法结果要高;

(2) 岩土参数变异性具有结构性与随机性的双重性质, 克里金估值方法可以通过“过滤效应”和“集团效应”考虑不同位置的数据的贡献性, 体现为权重系数的不同;

(3) 变异函数通过其本身结构及其参数从不同的角度反映空间的变异性, 变利用变异函数对岩土参数空间分布的结构性进行定量描述, 揭示岩土性质的空间变异规律。

(4) 模型中涉及一个尺度问题, 参数分布及其变异函数的空间格局是随着试验取样尺度的不同而变化的, 当研究尺度大而试验取样尺度小时, 能够从各个尺度全面地反映参数格局变化的影响因素, 但由于经济与其他的条件限制往往不能实现, 而较大的试验取样尺度又会掩盖小尺度上的一些外在影响, 因此, 合理地选择试验取样尺度需要进一步研究。

参 考 文 献

- [1] 张征, 刘淑春, 鞠硕华. 岩土参数空间变异性分析原理与最优估计模型[J]. 岩土工程学报, 1996, 18(4): 40—47.
- [2] 张征, 刘淑春. 岩土参数空间变异性及其评价方法[J]. 土木工程学报, 1995, 28(6): 43—51.
- [3] 张征, 刘淑春. 岩溶含水介质渗透性参数空间最优化估计的原理与方法[J]. 水文地质与工程地质, 1995, 22(6): 27—30.
- [4] 胡小荣, 唐春安. 岩土力学参数随机场的空间变异性分析及单元体力学参数赋值研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2000, 19(1): 59—63.
- [5] 谭文辉, 王家臣. 岩体强度参数空间变异性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, 18(5): 546—549.
- [6] 赵红亮, 冯夏庭, 张东晓, 等. 岩土力学参数空间变异性的集合卡尔曼滤波估值[J]. 岩土力学, 2007, 28(10): 2219—2223.
- [7] 杜国明, 汪光松, 吴超羽, 等. 克里金在珠江河道地形空间数据内插中的应用[J]. 中山大学学报 (自然科学版), 2007, 46(1): 119—122.
- [8] 刘胤雯, 赖格英, 陈元增, 等. 梅江河流域年均降雨量空间插值方法研究[J]. 亚热带资源与环境学报, 2007, 2(3): 29—34.
- [9] 谢先红, 崔远来, 顾世祥. 区域需水量和缺水率的空间变异性[J]. 灌溉排水学报, 2007, 26(1): 9—13.
- [10] 谢先红, 崔远来, 顾世祥. 云南水稻灌溉定额与农业灌溉定额的空间变异性[J]. 农业工程学报, 2007, 23(5): 95—99.
- [11] 张仁铎. 空间变异理论[M]. 北京: 科学出版社, 2005.